TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 14

ECUACIONES. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE RAÍCES.

1. INTRODUCCIÓN.

Sea K[x] el anillo de los polinomios en una indeterminada, sobre el cuerpo K. Si $P\in K[x]$, P recibe el nombre de Polinomio.

Sabemos que $\forall P\in K[x]$ con $P = a_o + a_1X + a_2X^2 +\ldots+ a_nX^n$ existe una función polinómica

$$P^*: K \to siendo\ \forall x\in K \quad P(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$$

donde el polinomio P sustituimos la indeterminada X por la variable x.

Las funciones polinómicas se pueden sumar y multiplicar siguiendo las reglas:

1) $(P^*+Q^*)(x)=P^*(x)+Q^*(x) \quad x\in K$

2) $(PQ)^*=P^*\cdot Q^*$

Dem.

Sea $P=\sum_{i=1}^{n}a_iX^i$ y $Q=\sum_{i=1}^{n}b_iX^i$ (pudiendo ocurrir que $a_n = 0$ ó $b_n = 0$)

1) $(P+Q)^*(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)x^n=\sum_{i=1}^{n}a_ix^n+\sum_{i=1}^{n}b_ix^n=P^*(x)+Q^*(x)=(P^*+Q^*)(x) \ \ \forall x\in K$

2) $(PQ)^*(x)=\sum_{K=0}^{2n}\left(\sum_{l=0}^{K}a_lb_{K-l}\right)x^K=\sum_{K=0}^{2n}\left(\sum_{l=0}^{K}a_lb_{K-l}x^K\right)=$

$$=\sum_{K=0}^{2n}\left(\sum_{l=0}^{K}a_lx^l\cdot b_{K-l}\cdot x^{K-l}\right)=\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\right)=$$

$$=P^*(x)Q^*(x)=(P^*Q^*)(x) \quad \forall x\in K$$

Como vemos, no es lo mismo P o P(X) que es un elemento de K[x] que $P^*(x)$ que es una función. En la práctica, llamaremos a $P^*(x)$ polinomio (en lugar de función polinómica) y lo denotaremos por P(x). Igualmente, cuando hablemos del valor del polinomio en un punto, estamos queriendo decir el valor de la función polinómica en un punto o elemento de K.

DEF Sea $P\in K[x]$ con $P = a_o + a_1X +\ldots+a_nX^n$. Llamaremos Polinomio derivada de P al polinomio de $P'\in K[x]$ definido por

$$P' = a_1 + 2a_2X +\ldots+ na_nX^{n-1}$$

DEF Sea $P\in K[x]$. Llamaremos Polinomio derivada m-esima a $P^{n)} = (P^{m-1)})$

OBS A partir de la definición se puede ver que si $P \in K[x]$ con grad(P) = n se verifica $P^{n)} = a_n \cdot n!$ y que $P^{m)} = 0 \quad \forall m > n$.

PROP Sean $P, Q \in K[x]$, se verifica:

1) $(P + Q)' = P' + Q'$

2) $(\lambda P)' = \lambda P' \quad \forall \lambda \in K$

3) $(PQ)' = P'Q + PQ'$

Dem.

Inmediata.

COROLARIO Sea $P \in K[x]$. $(P^m)' = mP^{m-1} \cdot P'$

Dem.

Inmediato. Se realiza por inducción.

TEOREMA. Fórmula de Taylor.

Sea $P \in K[x]$ con $P = a_o + a_1 X + \dots + a_n X^n$, $a \in K$ y K un cuerpo de característica cero. Se verifica la igualdad.

$$P = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + \dots + \frac{P^{n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

Dem.

Sea $V = \{P \in K[x] / \text{gra } d(P) \leq n\}$.

Es inmediato ver que $(V, +, \bullet_K)$ es un K-espacio vectorial, que dim V = n + 1 y que $B = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ es una base.

Probemos que $B' = \{1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^4\}$ es también base de V.

Sea $a_o + a_1(X-a) + \dots + a_n(X-a)^4 = 0$ una combinación lineal de B´ del vector nulo.

El coeficiente de X^n del polinomio de la izquierda es a_n, luego $a_n = 0$. Queda $a_o + a_1(X-a) + \dots + a_{n-1}(X-a)^{n-1} = 0$.

Repitiendo lo anterior n veces obtenemos que $a_j = 0 \quad \forall_j : 0, \dots, n$.

Luego B´ es base de V.

Entonces podemos escribir P como

$$P = \sum_{i=0}^{n} b_i (X - a)^i \quad \text{con} \quad b_i \in K \quad \forall i : 0,\dots,n$$

Tomando ahora el valor de P y sus derivadas sucesivas en a∈K obtenemos

$P(a) = b_o$

$P'(a) = b_1 \cdot 1!$

$P^{n)}(a) = b_n \cdot n!$

Y como K es de característica 0

$$P = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(X - a) + \dots\dots + \frac{P^{n)}(a)}{n!}(X - a)^n$$

DEF Sea P∈K[x] no nulo. Un elemento a∈K se dice que es raíz de P si P(a) = 0. También se llama cero del polinomio.

PROP Sea P∈K[x], y a∈K

a es raíz de P ⇔ X – a/P

Dem.

"⇒"

Si a es raíz de P ⇒ P(a) = 0

Si realizamos la división euclidea de P entre (X – a)

$$\exists C, R \in K[x] / P = (X - a)C + R \quad \text{con grad}(R) = 0 \Rightarrow R \in K$$

Como P(a) = R ⇒ R = 0 y X – a/P

"⇐"

Si X – a/P ⇒ P = (X – a)Q con Q∈K[x]

Trivialmente P(a) = 0 ⇒ a es raíz de P.

DEF Sea P∈K[x], $_m R \in \mathbb{N}$ con $R^m > 0$ y a∈K. Diremos que a es una raíz múltiple de orden R^m de P, si P es divisible por $(X – a)^m$ pero no lo es por $(X – a)^{m+1}$.

PROP Sea Car (K) = 0, a∈K, P∈K[x] y m∈ℕ con m > 0.

a es raíz de orden m de P $\Leftrightarrow$ $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{m-1)}(a) = 0$ y $P^{m)}(a) \neq 0$.

Dem.

"$\Rightarrow$"

Como a es raíz de orden m de P $\Rightarrow$ $P = (X - a)^m \cdot Q$

$Q(a) \neq 0$ ya que en caso contrario $X - a/Q \Rightarrow (X - a)^{m+1}/P$ lo cual no en contra de la hipótesis.

$P' = m(X - a)^{m-1} \cdot Q + (X - a)^m Q' = m(X - a)^{m-1} \cdot Q + R_1$ con $R_1(a) = 0$

$P'' = m(m - 1)(X - a)^{m-2} \cdot Q + R^2$ con $R_2(a) = 0$

………

$P^{m-1)} = m(m - 1)\ldots.. 2(X - a)Q + R_{m-1}$ con $R_{m-1}(a) = 0$

$P^{m)} = m!: Q + R_m$ con $R_m(a) = 0$

Y $P^{m)}(a) = m!\, Q \neq 0$ (ya que $car(K) = 0$)

"$\Leftarrow$"

La Fórmula de Taylor aplicada a $P \in K[x]$ en el punto $a \in K$

$$P = \frac{P^{m)}(a)}{m!}(X - a)^m + \ldots.. + \frac{P^{n)}(a)}{n!}(X - a)^n$$

Es claro que $(X - a)^m / P$ y $P = (X - a)^m \cdot Q$ con $Q(a) \neq 0 \Rightarrow (X - a)^{m+1}$ no divide a P. $\Rightarrow$ a es raíz de orden m de P.

2. ECUACIONES ALGEBRAICAS. RAICES.

DEF Llamamos Ecuación Algebraica de grado n a toda expresión de la forma $P(x) = 0$ donde $P(x)$ es un polinomio de grado n (función polinómica) con coeficientes reales. Los valores reales o complejos que sustituidos en x hacen que la ecuación algebraica sea una igualdad numérica las llamamos raíces o ceros de la ecuación. El proceso de cálculo de las raíces recibe el nombre de resolución de la ecuación.

Podemos generalizar la definición anterior como sigue:

DEF Llamamos ecuación a toda expresión de la forma $f(x) = g(x)$ que, mediante transformaciones algebraicas, se puede transformar en la forma $P(x) = 0$ siendo $P(x)$ un polinomio.

OBS A partir de la definición de ecuación algebraica podemos afirmar que las raíces (simples o múltiples) del polinomio $P(x)$ coinciden con las de la ecuación $P(x) = 0$. Es por ello que hablamos de forma indistinta de raíces o ceros de un polinomio P(x) y raíces o ceros de la ecuación algebraica P(x) = 0.

En lo que queda de tema vamos a tratar de hallar las raíces de una ecuación algebraica.

A lo largo de toda la historia del Algebra, entre otros, han existido dos problemas muy importantes ligados entre sí. Uno era demostrar la existencia de raíces de una ecuación algebraica, y el otro hallarlas por métodos algebraicos.

El primer problema lo solucionó Gauss en 1799 demostrando el "Teorema fundamental del Algebra: Toda ecuación algebraica tiene al menos una solución (real o compleja)". El teorema viene a decir que toda ecuación algebraica de grado n tiene n raíces o ceros.

El segundo problema lo resolvieron simultáneamente Niels Henrik Abel y Erariste Galois demostrando que toda ecuación algebraica de grado superior a 4 no eran, en general, resolubles por métodos algebraicos.

2.1. Ecuaciones de Cardano-Vieta.

El teorema fundamental del álgebra demostrado por Gauss nos dice que dado un polinomio P(x) de grad (P) = n, $P = a_o + a_1x + \ldots\ldots + a_nx^n$, existen n raíces, $x_1, \ldots, x_n$, que pueden ser reales o complejas, pudiendo entonces escribir el polinomio como $P(x) = a_n(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_n)$.

Partiendo de la expresión $P(x) = a_n(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_n)$ y multiplicando los paréntesis $P(x) = a_n\left[x^n - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)x^{n-1} + \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i x_j\right)x^{n-2} + \ldots + (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\right]$

Como la expresión general de P(x) es $P(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

Igualando ambos polinomios obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} a_{n-1} = a_n\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\ a_{n-2} = a_n\left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i x_j\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_o = a_n\left((-1)^n x_1 x_2 \ldots\ldots x_n\right) \end{array}\right\}$$

Estas expresiones se conocen con el nombre de ecuaciones de Cardano-Vieta, y nos dan una relación entre coeficientes de un polinomio y sus raíces.

Las ecuaciones de Cardano-Vieta adolecen de un defecto: No sabemos si las raíces que se obtienen como solución de ese sistema de ecuaciones son reales o complejas.

Veamos un resultado que nos permitirá aclarar un poco este problema.

PROP Sea $P(x) = 0$ una ecuación algebraica de grado n, con coeficientes reales. Si $x_j = a + bi$ es una raíz compleja de orden p de $P(x) = 0$ entonces $a - bi$ es también raíz compleja de orden p de la misma ecuación.

Dem.

Según el teorema de Gauss, el polinomio P(x) de grado n tiene $x_1, \dots, x_m$ raíces (reales o complejas), con $K_1, \dots, K_m$ el índice de multiplicidad y $\sum K_i = n$. Así, P(x) se puede escribir como:

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{K_1} \cdot (x - x_2)^{K_2} \cdot \ldots\ldots \cdot (x - x_m)^{K_m}$$

Como P(x) tiene coeficientes reales $(P(x) \in \mathbb{R}[x])$ se verifica que $P = \overline{P}$ y $\overline{P}(x) = a_n(x - \overline{x}_1)^{K_1} \cdot (x - \overline{x}_2)^{K_2} \cdot \ldots\ldots \cdot (x - \overline{x}_m)^{K_m}$

Y como la descomposición de P(x) es única, podemos tener dos situaciones

1) $x_i = \overline{x}_i \Rightarrow x_i \in \mathbb{R}$ y la raíz es real.

2) $x_i = \overline{x}_j \quad i \neq j \quad K_i = K_j \Rightarrow \overline{x}_i = \overline{\overline{x}}_j = x_j \Rightarrow x_i \quad y \quad x_j$ son raíces complejas conjugadas de P(x) y con el mismo índice de multiplicidad.

Por tanto $P(x) = 0$ tiene raíces reales y/o parejas de raíces complejas conjugadas con el mismo índice de multiplicidad.

Se deduce que si $(x - (a + bi))^P$ es un factor de P(x), también lo será $(x - (a - bi))^P$. Multiplicando ambos queda $((x - a)^2 + b^2)^P$.

Por tanto, podemos afirmar que $\forall P(x) \in \mathbb{R}[x]$, P(x) se puede descomponer como producto de factores de primer grado y/o de segundo grado con coeficientes reales y siendo su discriminante negativo.

Es lo mismo decir que los polinomios $(X - a)$ y $(aX^2 + bX + c)$ con $b^2 - 4ac < 0$ son los únicos polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.

3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES.

En este punto vamos a resolver por métodos algebraicos las ecuaciones algebraicas de grado 1, 2 y 3.

3.1. Ecuación de primer grado.

Una ecuación de primer grado es de la forma

$$ax + b = 0$$

y trivialmente

$$x = -\frac{b}{a}$$

siendo única la solución.

3.2. Ecuaciones de segundo grado.

Una ecuación de segundo grado es de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

Veamos como se resuelve:

Multiplicamos (1) por 4a: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

Completamos los dos primeros sumandos para obtener un cuadrado perfecto, sumando y restando b^2

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las dos raíces serán reales si $b^2 - 4ac \geq 0$ y complejas conjugadas en caso contrario.

Si $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \quad x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i$

3.3. Ecuación de tercer grado.

Una ecuación de tercer grado es de la forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Para simplificar las operaciones que vamos a realizar, y puesto que siempre es posible, vamos a considerar que el polinomio de tercer grado es normalizado, siendo la ecuación:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Lo primero es cambiar $x = x' - \frac{a}{3}$, pudiendo eliminar el término de segundo grado de la ecuación:

$$\left(x' - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(x' - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(x' - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$x'^3 - ax'^2 + \frac{1}{3}a^2x' - \frac{1}{27}a^3 + ax'^2 - \frac{2}{3}a^2x' + \frac{1}{9}a^3 + bx' - \frac{1}{3}ab + c = 0$$

$$x'^3 + \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a^2 + b\right)x' + \left(-\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{9}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right) = 0$$

Sea $p = b - \frac{1}{3}a^2$ y $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$

$$x'^3 + px' + q = 0$$

Realicemos ahora un nuevo cambio de variable

x´ = u + v $\qquad (u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$

Y desarrollando

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0$$

Como variando los valores de u y v, cualquiera que sea la suma u + v, siempre es posible fijar u · v, tomemos 3uv + p = 0. Entonces

$$\left.\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ uv &= -\frac{p}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3 \cdot v^3 &= -\frac{p^3}{27} \end{aligned}\right\}$$

Teniendo en cuenta las relaciones de Cardano-Vieta, podemos afirmar que u^3 y v^3 son raíces de la ecuación

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0$$

Al ser una ecuación de 2º grado sabemos resolverla siendo

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{y} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Entonces

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad \text{y} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Como x´ = u + v tenemos

$$x' = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Y al ser $x = x' - \frac{a}{3}$ $\quad p = b - \frac{1}{3}a^2$ y $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$

Sustituyendo obtenemos las tres raíces de la ecuación.

La ecuación de cuarto grado, debido a su complejidad y no demasiado interés, no la vamos a resolver.

4. APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE RAÍCES.

Dada una ecuación algebraica P(x) = 0 de grado n con coeficientes reales, vamos a tratar de resolverla, lo que significa calcular todas sus raíces o aproximarlas.

4.1. Cálculo de las raíces enteras y racionales de un polinomio con coeficientes racionales.

Sea P(x) = 0 una ecuación algebraica de grado n con coeficientes en Q.

Multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores, obtenemos otra ecuación con los coeficientes enteros, luego podemos considerar que P(x) = 0 es una ecuación algebraica con los coeficientes enteros.

4.1.1. Raíces Enteras.

Sea $P(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ con $a_i \in \mathbb{Z}$ $\forall$i: 1,…, n.

Si m$\in \mathbb{Z}$ es raíz de P(x) $\Rightarrow$ P(m) = 0

Como $P(m) = a_o + a_1 m + a_2 m^2 + ... + a_n m^n$

$\Rightarrow a_o + a_1 m + a_2 m^2 + ... + a_n m^n = 0 \Rightarrow a_o = -a_1 m - a_2 m^2 - ..... - a_n m^n$

$\Rightarrow a_o$ es un múltiplo de m ó m/a_o.

Además P(x) = (x – m) Q(x), siendo Q(x) de grado n – 1.

P(1) = (1 – m) Q(1) $\Rightarrow$ P(1) es múltiplo de (1 - m) ó 1 – m/P(1)

P(-1) = (-1 – m) Q(-1) $\Rightarrow$ P(-1) es múltiplo de (1 + m) ó 1 + m/P(-1)

Resumiendo, si $m \in \mathbb{Z}$ es un cero de la ecuación P(x) = 0 con coeficientes enteros, se debe verificar

1) m/a_o

2) 1 – m/P(1)

3) 1 + m/P(-1)

Luego basta descomponer en factores a_o e ir probando sus posibles divisores como soluciones de la ecuación en caso de que verifiquen también 2) y 3). Esas serán todas las soluciones enteras, si las hay.

4.1.2. Raíces Racionales.

Sea $\frac{p}{q}$ una raíz o cero de P(x) = 0 (con $\frac{p}{q}$ irreducible).

Entonces $a_o + a_1 \frac{p}{q} + a_2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 + ... + a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n = 0$

Y multiplicando por q^n $a_o q^n + a_1 q^{n-1} \cdot p + a_2 q^{n-2} \cdot p^2 + ... + a_n p^n = 0$

Como mcd (p, q) = 1 por ser $\frac{p}{q}$ irreducible tenemos:

1) $a_o q^n = -a_1 q^{n-1} \cdot p - a_2 q^{n-2} \cdot p^2 - ...... - a_n p^n \Rightarrow p/a_o$

2) $a_n p^n = -a_o q^n - a_1 q^{n-1} \cdot p - a_2 q^{n-2} \cdot p^2 + ... \Rightarrow q/a_n$

Además $P(x) = \left(x - \frac{p}{q}\right) Q(x) \Rightarrow P(x) = (qx - p)\frac{Q(x)}{q}$

1) $P(1) = (q-p)\dfrac{Q(1)}{q} \Rightarrow q-p \big/ P(1)$

2) $P(-1) = (-q-p)\dfrac{Q(-1)}{q} \Rightarrow q+p \big/ P(-1)$

Resumiendo, para que $\dfrac{p}{q}$ irreducible sea una raíz de la ecuación P(x) = 0 debe verificar:

1) p/a_o

2) q/a_n

3) q – p/P(1)

4) q + p/P(-1)

Observemos que si el coeficiente principal es 1, $a_n = 1$, la ecuación no tiene raíces racionales, ya que no hay ningún número q/1 salvo el propio 1 ó -1, siendo entonces $\dfrac{p}{q}$ un entero.

Para obtener todas las raíces racionales, descomponemos a_0 y a_1 en factores y escribimos todas las fracciones posibles formadas por los divisores de a_0 entre los divisores de a_n. Comprobamos que verifican 3) y 4) y esas serán las posibles raíces racionales.

4.2. Acotación de las Raíces Reales.

Una vez visto el caso particular de obtener las raíces enteras y racionales de una ecuación algebraica con coeficientes racionales, vamos a resolver el caso general.

Tenemos una ecuación algebraica P(x) = 0 con coeficientes reales. Para determinar sus raíces, realizaremos tres pasos. El primer paso consiste en acotar las posibles raíces.

Las raíces positivas estarán acotadas superiormente por L e inferiormente por l, y las raíces negativas lo serán superiormente por L´ e inferiormente por l´.

Es evidente que sólo vamos a describir métodos sobre P(x) para calcular la cota superior de las raíces positivas L, ya que l se calcula igual pero sobre P(1/x), l´ se calcula sobre P(- x) y L´ sobre P(-1/x). Veamos pues que esas cuatro cotas se pueden obtener sobre polinomios distintos.

4.2.1. Método de Laguerre.

PROP Sea $P(x) \in \mathbb{R}$. S al dividir P(x) por $x - L$ obtenemos un polinomio cociente con todos sus coeficientes positivos y el resto también es positivo, entonces L es una cota superior para las raíces positivas de P(x).

Dem.

Sea $P(x) = (x - L)\, Q(x) + R$ siendo $Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ con $b_i > 0$ $\forall i$ y $R > 0$.

Entonces $\forall x_o \in \mathbb{R}$ con $x_o > L$ se verifica que $(x_o - L) > 0$ y $Q(x_o) > 0 \Rightarrow P(x_o) > 0$

Luego P(x) no puede tener una raíz positiva mayor que L.

L es cota superior de todas las raíces positivas.

4.2.2. Método de Newton.

PROP Si un nº $L \in \mathbb{R}^+$ hace positivos $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ y todas sus derivadas, entonces L es una cota superior de las raíces positivas de P(x).

Dem.

Consideremos el desarrollo de Taylor para el polinomio P(x) en L.

$$P(x) = P(L) + \frac{P'(L)}{1!}(x - L) + \frac{P''(L)}{2!}(x - L) + \dots + \frac{P^{n)}(L)}{n!}(x - L)$$

Como por hipótesis $P^K(L) > 0$ $\quad 0 \leq K \leq n$, entonces

$\forall x_o > L \quad P(x_o) > 0$

Por tanto, no hay ninguna raíz mayor que L, y L es una cota superior de las raíces positivas.

4.3. Separación de las Raíces Reales.

Este es el segundo paso en la determinación de raíces reales de una ecuación algebraica $P(x) = 0$.

Una vez que sabemos que todas las raíces negativas están en el intervalo (l´, L´) y las positivas en el (l, L), vamos a tratar de separarlas. Es decir, vamos a dar intervalos en los que podamos afirmar que hay una raíz y solo una.

4.3.1. Separación de las raíces de un polinomio por medio de su derivada.

Para poder desarrollar este apartado vamos a enunciar dos teoremas. La demostraciones se pueden encontrar en el tema 25 y 26.

TEOREMA. Teorema de Bolzano.

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $x_o \in (a, b)$ tal que $f(x_o) = 0$.

TEOREMA. Teorema de Rolle.

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $x_o \in (a, b)$ tal que $f'(x_o) = 0$.

Como toda función polinómica es continua, podemos aplicar los dos teoremas anteriores a P(x).

El teorema de Bolzano nos indica que si un polinomio tiene signo contrario en los extremos de un intervalo, posee una raíz dentro de dicho intervalo, pero no afirma que sea única.

PROP Dada la ecuación algebraica $P(x) = 0$ de grad n, si $P(a) \cdot P(b) < 0$ entonces existe un número impar de raíces en (a, b).

<u>Dem.</u>

Sabemos que hay una raíz, al menos, en (a, b) puesto que es lo que afirma el teorema de Bolzano.

Supongamos que $x_1, x_2, \ldots, x_K$ son todas las raíces de P(x) en (a, b), pudiendo existir repetidas (raíces múltiples).

Entonces $P(x) = (x - x_1)\ldots\ldots(x - x_K)\, Q(x)$.

Sustituyendo P(x) en a y en b tenemos

$$P(a) = (a - x_1)\cdot\ldots\ldots\cdot(a - x_K)Q(a) = (-1)^K (x_1 - a)\cdot\ldots\ldots\cdot(x_K - a)Q(a)$$

$$P(b) = (b - x_1)\cdot\ldots\ldots\cdot(b - x_K)\cdot Q(b)$$

Sabemos que Q(a) y Q(b) tienen el mismo signo, ya que en caso contrario existiría una raíz de Q(x) (otra de P(x)) en (a, b) y no es posible.

También P(b) y Q(b) tienen el mismo signo, ya que todos los $b - x_i$ son positivos.

Entonces P(b) y Q(b) tienen el mismo signo. Como $x_i - a$ son positivos, para que P(a) y P(b) (o también P(a) y Q(a)) tengan signos contrarios, debe suceder que

$(-1)^K$ sea negativo, lo cual solo ocurre si K es impar.

Recíprocamente, si K es impar, P(a) y P(b) tendrán signos contrarios.

Al ser K impar, existen un número impar de raíces en (a, b).

PROP 1) Entre cada dos raíces consecutivas de P(x) hay al menos una raíz de P´(x).

2) Entre cada dos raíces consecutivas de P´(x) existe a lo sumo una raíz de P(x).

<u>Dem.</u>

1) Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R} / P(x_1) = 0$ y $P(x_2) = 0$

Aplicando el teorema de Rolle a P(x) en $[x_1, x_2]$ $\exists c \in (x_1, x_2) / P'(c) = 0$

2) Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dos raíces consecutivas de P´(x).

Supongamos que existen $x_1, x_2 \in (c_1, c_2)$ raíces de P(x).

Entonces, aplicando el apartado anterior

$\exists c \in (x_1, x_2) \subset (c_1, c_2) / P'(c) = 0$

lo cual es una contradicción con el hecho de ser c_1 y c_2 consecutivas.

Entonces existe a lo sumo una raíz de P(x).

Esta última proposición nos permite situar las raíces de P(x) entre cada dos raíces de P´(x), estando la primera raíz entre la cota inferior y la menor raíz de P´(x) y la última entre la mayor raíz de P´(x) y la cota superior.

El problema que tenemos con este método es que para poder separar las raíces de P(x) = 0 hemos de resolver la ecuación P´(x) = 0, y a veces tienen ambas ecuaciones una dificultad similar.

Podemos ver métodos que esquivan este problema.

4.3.2. Método de Budan-Fourier.

DEF Diremos que el par $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ presentan una variación si signo (a) ≠ signo (b). Se denotará por V(a, b) = 1.

Generalizando, $V(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} V(a_i, a_{i+1})$

TEOREMA. Teorema de Budan-Fourier.

Sea P(x) = 0 una ecuación algebraica de grado n, a, b$\in\mathbb{R}$ con a < b, $P^{K}(a) \neq 0$ y $P^{K)}(b) \neq 0$ $0 \leq K \leq n$. Entonces

$$V\left(P(a), P'(a),\ldots\ldots, P^{n)}(a)\right) - V\left(P(b), P'(b),\ldots\ldots, P^{n)}(b)\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \dot{2}$$

siendo $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ el nº de raíces de P(x) en (a, b) contadas con sus multiplicidades y $\dot{2}$ un múltiplo de 2.

4.3.3. Método de Sturns.

TEOREMA. Teorema de Sturns.

Sea P(x) = 0 una ecuación algebraica de grado n, y P(x) un polinomio sin raíces múltiples. Entonces

$$V\left(P(a), P'(a),\ldots\ldots, P^{n)}(a)\right) - V\left(P(b), P'(b),\ldots., P^{n)}(b)\right) = \text{Nº de raíces de P(x) en (a, b)}$$

OBS Si P(x) = 0 tuviese raíces múltiples, podemos analizar el polinomio que se obtiene de $\dfrac{P(x)}{\mathrm{mcd}\left(P(x), P'(x)\right)}$.

4.3.4. Método de Harriot-Descartes.

TEOREMA. Regla de los Signos de Harriot-Descartes.

Sea P(x) = 0 una ecuación algebraica con $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ entonces:

Nº de raíces positivas de P(x) $\leq V(a_o,\ldots.., a_n)$.

4.4. Aproximación de las Raíces Reales.

Este es el último paso en la determinación de raíces reales de una ecuación algebraica P(x) = 0.

Una vez que tengamos las raíces separadas en intervalos, hemos de aproximarlas con un grado de aproximación predeterminado. Veremos para ello varios métodos.

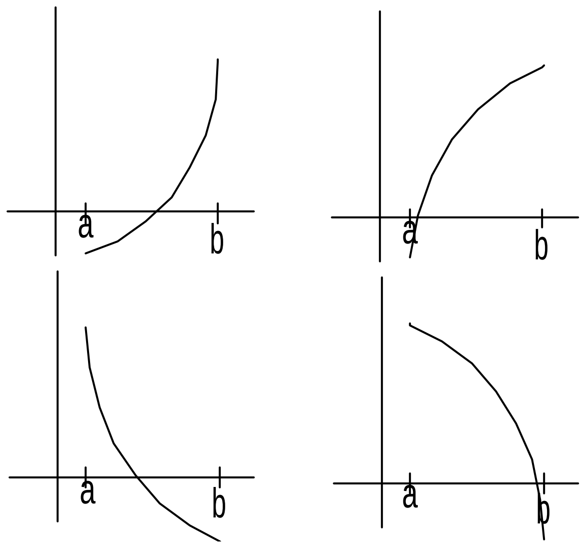
4.4.1. Método de Newton.

También se conoce como método de la tangente.

Sea α la única raíz de P(x) en (a, b) con P(a) · P(b) < 0.

Vamos a supones también que P´(x) y P´´(x) conservan el signo en el intervalo considerado.

Bajo estas condiciones, la gráfica de P(x) en (a, b) tiene cuatro posibilidades.



El método consiste en trazar la recta tangente al punto (a, P(a)) o (b, P(b)). Elegiremos aquella recta que corte al eje x en el interior de (a, b). Tomaremos como aproximación de la raíz α el punto de corte de al recta con el eje, x_1.

La recta tangente elegida verifica la condición P(x) P´´(x) > 0.

Si el error que se comete es superior al fijado de antemano, repetimos el proceso pero ahora trazando la tangente al punto (x_1, P(x_1)), obteniendo así una nueva aproximación, x_2.

Iterando el proceso, construimos una sucesión de aproximaciones a_α, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verificando Lim P(x_n) = 0.

Tenemos que P(a) < 0 y P´´(a) < 0, luego P(a) · P´´(a) > 0, por esa razón trazamos la tangente por (a, P(a)).

La ecuación de la tangente es

$$y - P(a) = P'(a)(x-a)$$

Entonces, el punto x_1 donde la tangente corta al eje x es

$$x_1 = a - \frac{P(a)}{P'(a)} \qquad (1)$$

Si iteramos el proceso, la tangente por $(x_1, P(x_1))$ es

$$y - p(x_1) = P'(x_1)(x - x_1)$$

siendo $(x_2, 0)$ el punto de corte de la recta tangente y el eje horizontal

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)}$$

Y en general

$$x_n = x_{n-1} - \frac{P(x_{n-1})}{P'(x_{n-1})}$$

Comprobemos que cada una de las aproximaciones mejora la anterior.

Escribiendo el polinomio de Taylor de P(x) en $x = a$, de grado 1

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x - a) + \frac{P''(\boldsymbol{x})}{2!}(x - a)^2$$

Sustituyendo x por la raíz de P(x), $x = \alpha$

$$0 = P(a) + \frac{P(a)}{P'(a)} + \boldsymbol{a} - a + \frac{P''(\boldsymbol{x})}{aP'(a)}(\boldsymbol{a} - a)^2$$

Entonces

$$\boldsymbol{a} = a - \frac{P(a)}{P'(a)} - \frac{P''(\boldsymbol{x})}{2P'(a)}(\boldsymbol{a} - a)^2$$

Teniendo en cuenta (1)

$$\boldsymbol{a} - x_1 = -\frac{P''(\boldsymbol{x})}{2P'(a)}(\boldsymbol{a} - a)^2 \qquad (2)$$

Tomando $|P''(x)| < K \quad \forall x \in (a, b)$ queda

$$|\boldsymbol{a} - x_1| < \frac{K(b - a)^2}{a|P'(a)|}$$

Veamos ahora que x_1 mejora la aproximación dada por a.

signo $(x_1 - a) =$ signo $\left(-\frac{P(a)}{P'(a)}\right)$ por (1) signo $\left(-\frac{P(a)}{P'(a)}\right)$ = signo $\left(-\frac{P''(x)}{2P'(a)}(\alpha - a)^2\right)$ ya que P(a) · P´´(a) > 0 y P´´(x) conserva el signo en el intervalo.

signo $\left(-\frac{P''(x)}{2P'(a)}(\alpha - a)^2\right)$ = signo (α - x_1) por (2)

Entonces signo (x_1 – a) = signo (α - x_1) y eso significa que

$$a < x_1 < \alpha$$

Reiterando el proceso $a < x_i < x_j < \alpha$ con $i < j$ lo que significa que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada por α, por tanto $\exists \lim x_n$ y es $\lim x_n = \alpha$.

Como $x_n = x_{n-1} - \frac{P(x_{n-1})}{P'(x_{n-1})}$

Tomando límites $\alpha = \alpha - \frac{P(lim x_{n-1})}{p'(lim x_{n-1})} \Rightarrow P(lim x_n) = 0 \Rightarrow$ por ser P(x) un polinomio $p(\lim x_n) = \lim P(x_n) \Rightarrow \lim (x_n) = 0$

4.4.2. Método de la Regula Falsi.

El método de la Regula Falsi es muy similar al método de Newton visto antes, pero en lugar de trabajar con tangentes, lo haremos con la cuerda que une los extremos del intervalo que consideremos en cada instante.

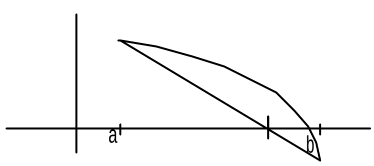
Sea α la única raíz de P(x) en (a, b) con P(a) P(b) < 0. Y supongamos que P´´(x) no se anula en (a, b).

La ecuación de la cuerda que une (a, P(a)) y (b, P(b)) es

$$y - P(a) = \frac{P(b) - P(a)}{b - a}(x - a)$$

Y corta al eje x en (x_1, 0) siendo

$$0 - P(a) = \frac{P(b) - P(a)}{b - a}(x_1 - a) \Rightarrow x_1 = a - \frac{P(a)(b-a)}{P(b) - P(a)} \Rightarrow x_1 = \frac{aP(b) - bP(a)}{P(b) - P(a)}$$



Si queremos obtener una nueva aproximación a α, repetiremos el proceso tomando ahora uno de los intervalos (a, x_1) ó (x_1, b). Elegiremos aquel que verifique las condiciones de partida (en nuestro caso (a, x_1) ya que P(a) · P(x_1) < 0).

Entonces $x_2 = \dfrac{aP(x_1) - x_1 P(a)}{P(x_1) - P(a)}$

Podemos iterar el proceso de sucesión monótona (creciente o decreciente) y acotada por b ó a respectivamente.

Entonces la sucesión tiene limite y la recurrencia nos dice que dicho límite es α.

Si queremos hallar un término de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuya distancia a α sea menor que un error dado de antemano, hemos de conocer una cota de error que se produce al sustituir α por x_m.

Sea x_m un valor aproximado de α, raíz de P(x). Al ser P(x) un polinomio, es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b). Aplicando el teorema de Lagrange en [α, x_n].

$$\exists \xi \in (\alpha, x_n) / P(x_n) - P(\alpha) = P'(\xi)\cdot(x_n - \alpha)$$

Entonces $P(x_n) = P'(\xi)(x_n - \alpha) \Rightarrow |x_n - \alpha| = \left|\dfrac{P(x_n)}{P'(\xi)}\right| < \left|\dfrac{P(x_n)}{C}\right|$

siendo C < $|P'(x)| \quad \forall x \in (a,b)$

Luego si queremos calcular, por este método, una aproximación de la raíz α con un error menor que e, debemos iterar el proceso m veces hasta que se verifique $\dfrac{|P(x_m)|}{C}$ < e.

4.4.3. Método general de Iteración.

El método de Newton y el método de la Regula Falsi son casos particulares del llamado método de Iteración.

Si somos capaces de encontrar una función Ψ(x) definida [a, b], que tiene una única raíz en (a, b) y tal que la ecuación P(x) = 0 con x la única raíz de P(x) en (a, b) sea equivalente a x = Ψ(x), entonces la recurrencia x_n = Ψ(x_n – 1) nos proporciona una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de la que podemos afirmar:

PROP Si Ψ es continua [a, b], derivable en (a, b) y $|\Psi'(x)|$ < K< 1 ∀x∈(a, b), entonces la sucesión definida por la recurrencia x_n = Ψ(x_{n-1}) es convergente a α, siendo α la única raíz de P(x) en (a, b).

<u>Dem.</u>

Consideremos el intervalo $[x_{n-1}, \alpha]$ (o $[\alpha, x_{n-1}]$ según sea el caso] y apliquemos a Ψ en ese intervalo el teorema de Lagrange:

$$\exists \boldsymbol{x} \in (x_{n-1}, \boldsymbol{a}) / \Psi(\boldsymbol{a}) - \Psi(x_{n-1}) = \Psi'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a} - x_{n-1})$$

Y como $\Psi(\alpha) = \alpha$ y $\Psi(x_{n-1}) = x_n$

Entonces $\alpha - x_n = \Psi'(\xi)(\alpha - x_{n-1})$

Teniendo en cuenta que $|\Psi'(\boldsymbol{x})| < K < 1 \quad \forall \xi \in (a, b)$

$$|\boldsymbol{a} - x_n| = |\Psi'(\boldsymbol{x})| \cdot |\boldsymbol{a} - x_{n-1}| < K|\boldsymbol{a} - x_{n-1}| < K^2 \cdot |\boldsymbol{a} - x_{n-2}| < \ldots < K^n \cdot |b - a|$$

Y como $b - a > 0$ y $\lim K^n = 0$ por ser $K < 1$

$$|\boldsymbol{a} - x_n| < K^n \cdot (b - a) \Rightarrow lim x_n = \boldsymbol{a}$$

Bibliografía Recomendada.

The Beauty of Fractals. Aut. H.O. Peitgen. P.H.Richter. Ed. Springer-Verlag.

Dynamical System and Fractals. Ed. Cambridge University Press.

Introducción al Cálculo Numérico. Aut. Aubanell. Ed. Universidad Autónoma de Barcelona.

Dynamics of Simple Maps. Aut. Robert L. Devaney.